Suites Numériques

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définitions

Suites adjacentes

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ adjacentes : } \begin{cases} u \text{ croissante} \\ v \text{ décroissante} \\ u_n - v_n \longrightarrow 0 \end{cases}}$$

Suite extraite

$$\boxed{u_{\varphi(n)} \text{ est extraite de } u_n}$$

$$\boxed{\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = l \implies u_n \longrightarrow l}$$

Points fixes

Si f est continue sur I et u_n est définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$:

$$\boxed{u_n \longrightarrow l \in \mathbb{R} \implies f(l) = l}$$

Théorèmes

Théorème des gendarmes

Hypothèses : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$ et $l \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{cases} u_n \longrightarrow l \\ w_n \longrightarrow l \end{cases} \implies v_n \longrightarrow l}$$

Théorème de la limite monotone

$$\begin{array}{ccc} u \text{ croissante et majorée par } M & \implies & u \text{ cv et } \lim u_n \leq M \\ u \text{ croissante non majorée} & \implies & u_n \longrightarrow +\infty \\ u \text{ décroissante et minorée par } m & \implies & u \text{ cv et } \lim u_n \geq m \\ u \text{ décroissante non minorée} & \implies & u_n \longrightarrow -\infty \end{array}$$

Théorème des segments emboités

Hypothèses : (I_n) est une suite décroissante de longueur $l(I_n)$ de segments non vides : $\forall n, I_{n+1} \subset I_n$

$$\boxed{l(I_n) \longrightarrow 0 \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ est un singleton}}$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Hypothèses : u_n est une suite de réels bornée

$$\boxed{\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement décroissante tq } (u_{\varphi(n)}) \text{ cv}}$$

Suites dominées, négligeables, équivalentes

Avec u et v des suites réelles

u est dominée par v (O)	u est négligeable par rapport à v (o)	u est équivalente à v ($\sim$)
$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N},$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$
$\forall n \geq N, \lvert u_n\rvert \leq M\lvert v_n\rvert$	$\forall n \geq N, \lvert u_n\rvert \leq \varepsilon\lvert v_n\rvert$	$\forall n \geq N, \lvert u_n - v_n\rvert \leq \varepsilon\lvert v_n\rvert$

Suites récurrentes

Suites récurrentes dans $\mathbb{C}$

u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si $\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n}$

On y associe $(C) : z^2 = az + b$.

Si (C) a deux racines r_1 et r_2 :

$$\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A r_1^n + B r_2^n}$$

Si (C) a une racine double r :

$$\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + Bn) r^n}$$

Suites récurrentes dans $\mathbb{R}$

u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si $\boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n}$

On y associe $(C) : x^2 = ax + b$.

Si (C) a deux racines r_1 et r_2 :

$$\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A r_1^n + B r_2^n}$$

Si (C) a une racine double r :

$$\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + Bn) r^n}$$

Si (C) a deux racines complexes $r\mathrm{e}^{\pm i\theta}$:

$$\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)) r^n}$$